ΜΕΡΟΣ Α΄

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Τι ονομάζεται Αριθμητική και τι Αλγεβρική παράσταση;

Ονομάζεται Αριθμητική παράσταση μια παράσταση που περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών.

Ονομάζεται αλγεβρική παράσταση μια παράσταση που περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

2. Τι ονομάζουμε όρους μιας αλγεβρικής παράστασης και τι αναγωγή ομοίων όρων της;

Ονομάζουμε όρους μιας αλγεβρικής παράστασης τους προσθετέους της.

Ονομάζουμε αναγωγή ομοίων όρων τη διαδικασία με την οποία γράφουμε σε απλούστερη μορφή μια αλγεβρική παράσταση.

3. Ποιοι κανόνες ισχύουν για την ισότητα δύο αριθμών;

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ισότητα. Δηλαδή:

$$\textit{Αν} \quad \alpha=\beta \quad \textit{τότε} \quad \alpha+\gamma=\beta+\gamma$$

Αν από τα δυο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ισότητα. Δηλαδή:

$$\textit{Αν} \quad \alpha=\beta \quad \textit{τότε} \quad \alpha-\gamma=\beta-\gamma$$

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ισότητα. Δηλαδή:

$$\textit{Αν} \quad \alpha=\beta \quad \textit{τότε} \quad \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$$

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ισότητα. Δηλαδή:

$$\textit{Αν} \quad \alpha=\beta \quad \textit{τότε} \quad \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\gamma} \quad \textit{με } \gamma\neq 0$$

4. Τι ονομάζουμε εξίσωση;

Ονομάζουμε εξίσωση μια ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα άγνωστο (μια μεταβλητή).

5. Να διατυπώσετε τις ιδιότητες των ανισοτήτων.

Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha + \gamma < \beta + \gamma}$

Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha - \gamma < \beta - \gamma}$

Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας τα πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma > 0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma}$

Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας τα πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίστροφη φορά. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma < 0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma}$

Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας τα διαιρέσουμε με τον ίδιο θετικό αριθμό , τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma > 0}$ τότε $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma} < \dfrac{\beta}{\gamma}}$

Αν και τα δύο μέλη μιας ανισότητας τα διαιρέσουμε με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίστροφη φορά. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ και $\boldsymbol{\gamma < 0}$ τότε $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}}$

6. **Τι ονομάζουμε ανίσωση;**

Ονομάζουμε ανίσωση μια ανισότητα που περιέχει μια μεταβλητή.

2^{o} ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. **Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α ;**

   Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού ***α*** ονομάζεται ο θετικός αριθμός **ο** οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό ***α*** . Η τετραγωνική ρίζα του ***α*** συμβολίζεται $\sqrt{\alpha}$.

2. **Για ποιους αριθμούς δεν ορίζεται η τετραγωνική ρίζα και γιατί;**

   Δεν ορίζεται για τους αρνητικούς αριθμούς γιατί οποιοσδήποτε αριθμός στο τετράγωνο είναι θετικός ή μηδέν.

3. **Ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας:**

   $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ για $a \geq 0$

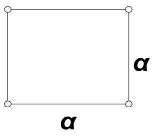
   αν $\sqrt{a} = x$ τότε $a = x^2$ για $a \geq 0$ και $x \geq 0$

Μ Ε Ρ Ο Σ Β΄

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

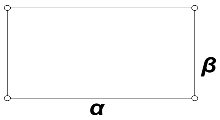
1. Με τι ισούται το εμβαδόν τετραγώνου, ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου, ορθογωνίου τριγώνου και τραπεζίου;

Το εμβαδόν ενός ***τετραγώνου*** πλευράς α ισούται με $α^2$.



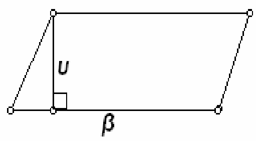
$$\mathrm{E} = \alpha^2$$

Το εμβαδόν ενός ***ορθογωνίου*** με πλευρές ***α, β*** ισούται με ***α · β***.



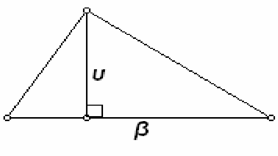
$$\mathrm{E} = \alpha \cdot \beta$$

Το εμβαδόν ενός ***παραλληλογράμμου*** είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.



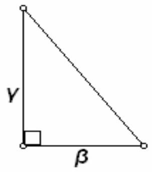
$$\mathrm{E} = \beta \cdot \upsilon$$

Το εμβαδόν ενός ***τριγώνου*** είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.



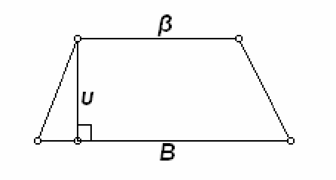
$$\mathrm{E} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

Το εμβαδόν ενός ***ορθογωνίου τριγώνου*** είναι ίσο με το μισό του γινομένου των δύο κάθετων πλευρών του.



$$\mathrm{E} = \frac{\beta \cdot \gamma}{2}$$

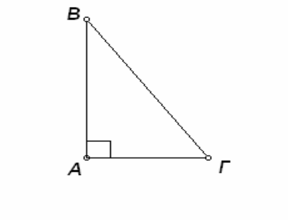
Το εμβαδόν ενός ***τραπεζίου*** είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του με το ύψος του.



$$\mathrm{E} = \frac{(\beta + \mathrm{B}) \cdot \upsilon}{2}$$

2. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Να κάνετε σχήμα και να γράψετε τη μαθηματική σχέση.

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας .



$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2$$

3. Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

2^{o} ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Τι ονομάζεται ημίτονο μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου;

Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι στην γωνία ω κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\eta\mu\omega = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}$$

2. Τι ονομάζεται συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου;

Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της προσκείμενης στην γωνία ω κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}$$

3. **Τι ονομάζεται εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου;**

Εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι στην γωνία ω κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη στην γωνία ω κάθετη πλευρά.

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\pi\rho\sigma\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}$$

4. **Ποιοι περιορισμοί υπάρχουν για το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ω; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**

Οι περιορισμοί είναι:

$$0 < \eta\mu\omega < 1 \quad \text{και} \quad 0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$$

Ο περιορισμός $0 < \eta\mu\omega < 1$ ισχύει γιατί :

$$\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha} < \upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha$$

$$\frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} < 1$$

$$0 < \eta\mu\omega < 1$$

Ο περιορισμός $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$ ισχύει γιατί :

$$\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha} < \upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha$$

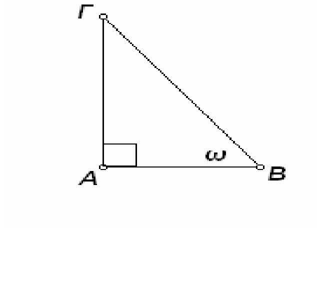
$$\frac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta \;\; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta \;\; \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha} < 1$$

$$0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$$

5. **Με ποια σχέση συνδέονται τα ημω, συνω, εφω ; Να αποδείξετε τη σχέση αυτή.**

Η σχέση είναι $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.

Για την απόδειξη της σχέσης:



$$\varepsilon\phi\omega = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}}$$

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}}{\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}}$$

Άρα $\varepsilon\phi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

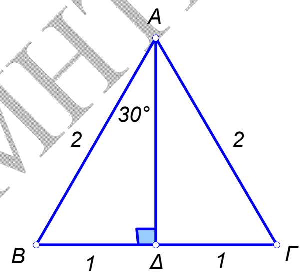
6. Πως υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 30°;

Κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ = 2cm .

Φέρνουμε το ύψος ΑΔ που είναι και διάμεσος οπότε ΒΔ = ΔΓ = 1cm

και διχοτόμος της γωνίας Α οπότε $\widehat{\mathrm{BA\Delta}} = \widehat{\mathrm{\Gamma A\Delta}} = 30^{\circ}$

Στο τρίγωνο ΑΒΔ($\widehat{\Delta} = 90^{\circ}$) έχουμε:



$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + \Delta\mathrm{B}^2 \Leftrightarrow 2^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + 1^2 \Leftrightarrow$

$\mathrm{A\Delta}^2 = 4 - 1 \Leftrightarrow \mathrm{A\Delta}^2 = 3 \Leftrightarrow \mathrm{A\Delta} = \sqrt{3}$ cm

$\eta\mu 30^{\circ} = \dfrac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{2}$,

$\sigma\upsilon\nu 30^{\circ} = \dfrac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

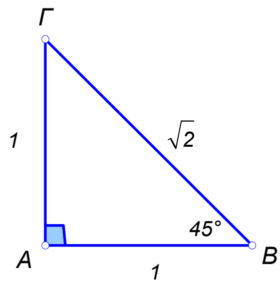
$\varepsilon\varphi 30^{\circ} = \dfrac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{A\Delta}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\eta\mu 60^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\ 60^{\circ} = \dfrac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi 30^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

7. Πως υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 45°;

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές

τρίγωνο ΑΒΓ με ($\widehat{\mathrm{A}} = 90^{\circ}$) , ΑΒ = ΑΓ = 1cm



$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 \Leftrightarrow$

$\mathrm{B\Gamma}^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}^2 = 2 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma} = \sqrt{2}$

$\eta\mu\ 45^{\circ} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sigma\upsilon\nu\ 45^{\circ} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

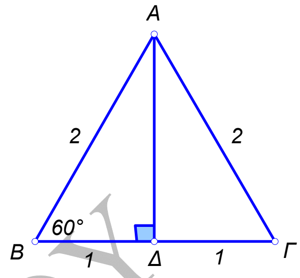
$\varepsilon\varphi 45^{\circ} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{1} = 1$

8. Πως υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των $60°$;

Κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ = 2cm .

Φέρνουμε το ύψος ΑΔ που είναι και διάμεσος οπότε ΒΔ = ΔΓ = 1cm

και αφού είναι ισόπλευρο $\widehat{B} = 60°$



Στο τρίγωνο ΑΒΔ($\widehat{\Delta} = 90°$) έχουμε:

$AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 \Leftrightarrow 2^2 = A\Delta^2 + 1^2 \Leftrightarrow$

$A\Delta^2 = 4 - 1 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 3 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{3}$ cm

$\eta\mu 60° = \dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sigma\upsilon\nu\, 60° = \dfrac{B\Delta}{AB} = \dfrac{1}{2}$,

$\varepsilon\varphi 60° = \dfrac{A\Delta}{B\Delta} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

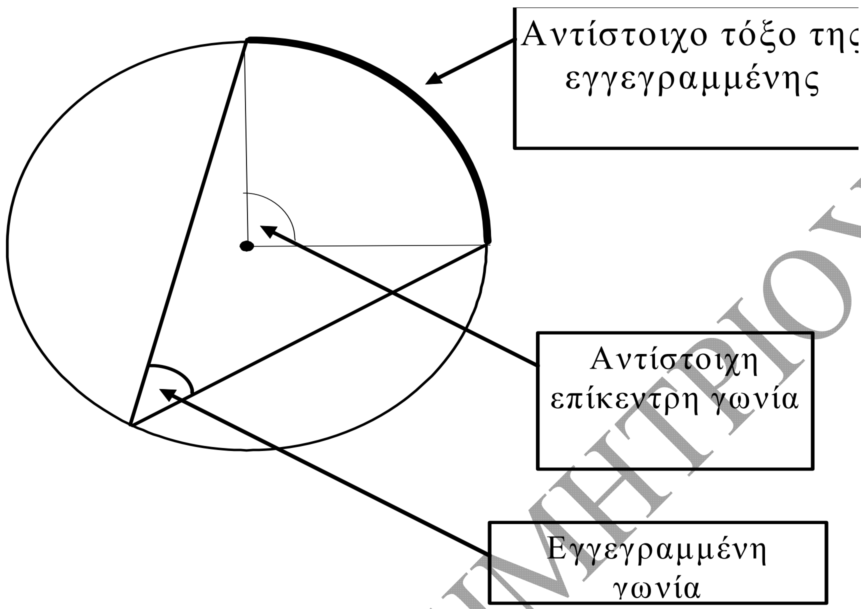
9. Πίνακας των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 30°,45°,60°

	30°	**45°**	**60°**
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3^o ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Τι ονομάζεται εγγεγραμμένη γωνία ;

Ονομάζεται εγγεγραμμένη γωνία η γωνία που η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.



2. Ποια είναι η σχέση μεταξύ μιας εγγεγραμμένης και μιας επίκεντρης γωνίας που έχουν το ίδιο τόξο;

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που έχει ίσο με αυτή αντίστοιχο τόξο.

3. Ποια είναι η σχέση μεταξύ μιας εγγεγραμμένης και του αντίστοιχου τόξου της;

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε μοίρες είναι ίση με το μισό του αντίστοιχου τόξου της.

4. Άλλες ιδιότητες που ισχύουν για τις εγγεγραμμένες γωνίες

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι ίσες.

5. Πότε ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό όταν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες.

6. Με τι ισούται η κεντρική γωνία ενός κανονικού ν-γώνου;

Η κεντρική γωνία ενός κανονικού ν-γώνου είναι ίση με

$$\omega = \frac{360^o}{\nu}$$

7. Με ποια σχέση συνδέονται η γωνία και η κεντρική γωνία ενός κανονικού ν-γώνου;

Η γωνία φ και η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού ν-γώνου είναι παραπληρωματικές. Δηλαδή:

$$\varphi = 180^o - \omega$$

8. Ποιοι τύποι μας δίνουν το μήκος (L) του κύκλου (Ο, ρ) ;

Το μήκος του κύκλου δίνεται από τις σχέσεις:

L = 2πρ

ή

L = πδ   όπου δ η διάμετρος του κύκλου

9. Ποιος τύπος μας δίνει το εμβαδόν (Ε) του κυκλικού δίσκου (Ο, ρ) ;

Ο τύπος για το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι:

$E = \pi\rho^2$